CONTINUITÀ, DIFFERENZIABILITÀ (ESERCIZI)

Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Continuità e differenziabilità al variare di α
2) Esistono α t.c. f sia differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non C^1 ?

Soluzione:

f è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ allora f si estende per continuità al $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(0,0)=0$, e tale estensione è continua.

Notiamo inizialmente che

$$|f(x,y)| = (2x^2+y^2)^\alpha \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|$$

scriviamo $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$

$$r^{2\alpha}(2\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)^\alpha \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right| =$$

$$= r^{2\alpha}(\cos^2\vartheta + 1)^\alpha \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right|$$; Consideriamo i casi così

$\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$. Se $\alpha < 0$, $(\cos^2\vartheta + 1)^\alpha \geq 2^\alpha$, quindi

$|f(x,y)| \geq r^{2\alpha} \cdot 2^\alpha \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right| \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$; quest'espressione non dipende da ϑ, ed il modulo di $f(x,y)$ è minorato da una funzione della sola distanza dall'origine r, che esplode $a +\infty$ per $r \to 0$. Quindi tutta $f(x,y)$, in modulo, è più grande su ogni palla $B(0,r)$ di una funzione che sta esplodendo per $r \to 0$ (radiale). Per cui $|f(x,y)| \to +\infty$.

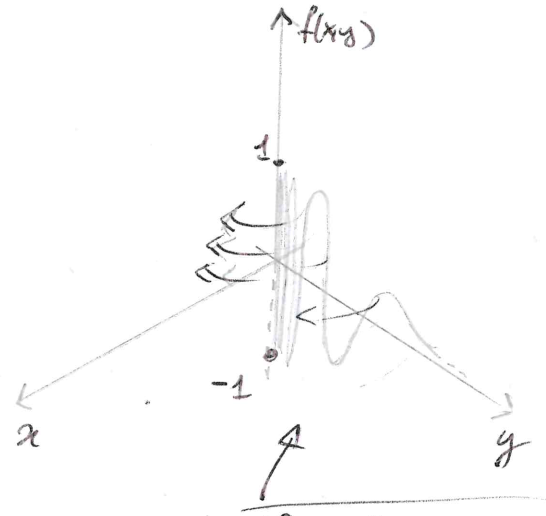
Se $\alpha = 0$, abbiamo

$$f(x,y) = (2x^2+y^2)^0 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$; in coordinate polari

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{r}\right)$$; il limite di questa funzione non esiste!

In pratica per $\alpha = 0$, $f(x,y)$ è una funzione radiale: dipende solo dalla distanza $\sqrt{x^2+y^2}$ dall'origine! La possiamo pensare addirittura come una funzione di una sola variabile r! Ed il limite, per $r \to 0$, non esiste: f oscilla indefinitamente vicino a $(x,y)=(0,0)$.

Quindi $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se $\alpha = 0$.



il grafico di f si ottiene facendo ruotare questa curva attorno all'asse z!

Consideriamo ora $\alpha > 0$. Scriviamo f in coordinate polari:

$$f(x,y) = r^{2\alpha}(2\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Ci aspettiamo, siccome $\alpha > 0$, che tutto vada a 0.

Per provarlo ci serve quindi una maggiorazione

$$|f(x,y)| = r^{2\alpha}\left(1+\cos^2\theta\right)^{\alpha} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right|}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq 2^{\alpha} r^{2\alpha} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Quindi f è maggiorata in modulo da una funzione radiale che va a 0 per $r\to 0$. Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{per } \alpha > 0.$$

Passiamo alla differenziabilità. $(\alpha>0)$.

Innanzitutto su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la funzione è di classe C^1 (addirittura C^∞): le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ come funzioni di (x,y) esistono e sono continue. Per cui f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (T. differenziale totale) e in più

$$df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \quad \text{(T. diff. totale)}.$$

Resta solo da capire la differenziabilità in 0.
Ricordiamo che se esiste, il differenziale è quell'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - T\big((x,y)-(x_0,y_0)\big)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} = 0$$

(come è uguale per $\mathbb{R}^n$!)

Parentesi: se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, cioè le funzioni

$(x,y) \longmapsto \partial_x f(x,y)$

$(x,y) \longmapsto \partial_y f(x,y)$ sono continue in $\mathbb{R}^2$ (o in generale nel dominio di f), allora f è differenziabile! Qual è il differenziale di f in un punto (x_0, y_0)? esso è la funzione lineare $df(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che agisce così

$$\underset{\text{“}\,T\,\text{''}}{df(x_0,y_0)}\underset{\text{“}\,T\,\text{''}}{(x,y)} = \left(\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$= \partial_x f(x_0,y_0) \cdot x + \partial_y f(x_0,y_0) \cdot y$. Vediamo se fa proprio quello che si richiede faccia il differenziale:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) - \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

(e si può vedere che questo limite è appunto 0:

si scrive $(x,y) = (x_0,y_0) + (h_1,h_2)$, con $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ e $|(h_1,h_2)| \to 0$, si sostituisce nella formula e si usa il T. del valor medio e il fatto che le derivate parziali $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue).

La cosa su cui bisogna fissarsi è il significato del differenziale: se $f \in C^1$,

$$df(x_0,y_0) = \left(\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)\right)$$ e agisce così (essendo $df(x_0,y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

$$df(x_0,y_0)(x,y) = \left(\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \partial_x f(x_0,y_0)\cdot x + \partial_y f(x_0,y_0)\cdot y$$

"p. scalare" in un certo senso!

Nel punto $(0,0)$, f non è C^1. Ricordiamo però una cosa: se f è differenziabile in un punto, allora esistono le derivate parziali in quel punto (è derivabile anzi, in quel punto). Attenzione che è diverso dal dire C^1: semplicemente stiamo dicendo che se una funzione è differenziabile in un punto, è derivabile in quel punto: è una nozione **locale** (punto per punto!). Essere C^1 è invece molto più: è dire che le "funzioni" derivata parziale in x ed in y esistono in ogni punto di D, e in più sono continue in D (D dominio di f)! Sono cose ben lontane tra di loro: Riassumendo: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$)

Allora

$$\boxed{f \in C^1(D) \Longrightarrow f \text{ differenziabile in } D \text{ (in ogni punto di } D) \Longrightarrow f \text{ derivabile in } D \text{ (in ogni punto di } D) \text{ e continua!}}$$

In particolare, se f fosse differenziabile <u>in un punto</u> (x_0, y_0), $df(x_0,y_0) = \left(\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0) \right)$; quindi si inizia a cercare un candidato differenziale $df(0,0)$. Cioè si cercano le derivate parziali di f in $(0,0)$:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \quad \text{(come una derivata in } \mathbb{R} \text{)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 2^{\alpha} h^{2\alpha} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \begin{cases} = 0, & \alpha > \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \lim\limits_{h \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \Rightarrow \nexists, & \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty, & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la derivata parziale rispetto ad x in $(0,0)$ esiste sse $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^{2\alpha} \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \begin{cases} 0 & \alpha > \frac{1}{2} \\ \nexists & \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

La derivata parziale rispetto ad y in $(0,0)$ esiste sse $\alpha > \frac{1}{2}$.

Quindi f potrebbe essere differenziabile !!! in $(0,0)$!!! solo se $\alpha > \frac{1}{2}$, ed il candidato differenziale $df(0,0)$ è $(0,0)$

[Cioè la funzione lineare $df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(0,0)(x,y) = (0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Scriviamo la definizione di differenziale:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\overset{!}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2+y^2)^\alpha \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{0}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(0,0)\cdot(x,y)}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

Scriviamo la funzione $\dfrac{(2x^2+y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in coordinate polari:

$$\frac{r^{2\alpha}(\cos^2\vartheta+1)^\alpha \cdot \sin\left(\frac{1}{r}\right)}{r} = r^{2\alpha-1}\cdot \underbrace{(\cos^2\vartheta+1)^\alpha}_{\leq 2^\alpha} \cdot \sin\left(\frac{1}{r}\right)$$; siccome $|\sin(\frac{1}{r})|\leq 1$,

$$|f(x,y)| \leq 2^\alpha \cdot r^{2\alpha-1} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0 \quad \text{se} \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Per cui f è differenziabile anche in $(0,0)$ per $\alpha > \frac{1}{2}$.

Per $\alpha > \frac{1}{2}$ f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Vediamo invece quando è di classe C^1. Ciò vuol dire che le derivate parziali (come funzioni) sono continue su $\mathbb{R}^2$.

Cioè verifichiamo quando $\partial_x f(x,y)$ e $\partial_y f(x,y)$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}$.

$$\partial_x f(x,y) = x(2x^2+y^2)^\alpha\left(\frac{4\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{2x^2+y^2} - \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$\partial_y f(x,y) = y(2x^2+y^2)^\alpha\left(\frac{2\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{2x^2+y^2} - \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$\partial_x f$ e $\partial_y f$ come funzioni di x ed y sono chiaramente continue su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In più dal conto fatto prima, $\partial_x f(0,0) = 0$ e $\partial_y f(0,0) = 0$. Affinché $\partial_x f$ e $\partial_y f$ siano continue su tutto $\mathbb{R}^2$, resta da vedere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0 .$$

Scriviamole in coordinate polari:

$$\left|\partial_x f(x,y)\right| = \left| r\cos 2\theta \cdot r^{2\alpha} \cdot (1+\cos^2 2\theta) \cdot \left(\frac{4\alpha \sin\left(\frac{1}{r}\right)}{r^2 (1+\cos^2 2\theta)} - \frac{\cos\left(\frac{1}{r}\right)}{r^3} \right) \right| =$$

$$= \frac{r^{2\alpha+1}}{r^3} \cdot \left| \left(\frac{4\alpha \sin\left(\frac{1}{r}\right)}{\frac{1}{r}} - \cos\left(\frac{1}{r}\right) \cdot (1+\cos^2 2\theta) \right) \right| =$$

$$= r^{2\alpha-2} \cdot \left| 4r\alpha \sin\left(\frac{1}{r}\right) - \cos\left(\frac{1}{r}\right) \cdot (1+\cos^2 2\theta) \right| \leq$$

$$r^{2\alpha-2} \cdot \left(4r\alpha \left|\sin\left(\tfrac{1}{r}\right)\right| + 2\left|\cos\left(\tfrac{1}{r}\right)\right| \right) ;$$

$$\lim_{r\to 0^+} r^{2\alpha-2} \cdot \left(4r\alpha \left|\sin\left(\tfrac{1}{r}\right)\right| + 2\left|\cos\left(\tfrac{1}{r}\right)\right| \right) = 0 \quad \text{se} \quad 2\alpha - 2 > 0 \text{ i.e. } \alpha > 1.$$

Se $\alpha = 1$, si ha che

$$\partial_x f(x,y) = (\text{scritto in c. polari}) = \left(4r\sin\left(\frac{1}{r}\right) - \cos\left(\frac{1}{r}\right) \cdot (1+\cos^2 2\theta) \right)$$

e il limite per $r \to 0^+$ non esiste (similmente a quanto ~~fatto~~ prima).

Invece, se $\alpha < 1$ $(\alpha > \frac{1}{2})$,

$$|\partial_x f(x,y)| = r^{2\alpha-2} \cdot \left| 4r\alpha \sin(\tfrac{1}{r}) - \cos(\tfrac{1}{r}) \cdot (1+\cos^2\theta) \right| \geq$$

$$\geq r^{2\alpha-2} \cdot \left| 4r\alpha \sin(\tfrac{1}{r}) - |\cos(\tfrac{1}{r})| \cdot (1+\cos^2\theta) \right| \geq \underbrace{r^{2\alpha-2} \cdot \left| 4r\alpha \sin(\tfrac{1}{r}) - |\cos(\tfrac{1}{r})| \right|}_{\xrightarrow{r \to 0^+} +\infty}$$

Quindi $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y)$ se $\alpha < 1$.

Infine, gli stessi conti per $\partial_y f(x,y)$ mostrano che $\partial_y f(x,y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ sse $\alpha > 1$.

I prossimi due esercizi riguardano lo studio di continuità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^6}{x^6+y^8} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4+y^6} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

La parte relativa alla continuità in $(0,0)$ potrebbe creare confusione: è una tecnica più generale che si applica in diversi altri casi, e con funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; si usa per provare che

$f(x,y) = \dfrac{x^a y^b}{x^{2m}+y^{2n}}$, $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$ è continua in 0 sse $\boxed{\dfrac{a}{2m}+\dfrac{b}{2n} > 1.}$

C'è un modo più semplice per provare la continuità.

Per cui su questo svolgimento leggere più attentamente solo la parte relativa alla differenziabilità. La continuità svolta in modo più semplice si trova negli altri appunti.

2] Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^6}{x^6+y^8} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

) provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$

) stabilire se f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Sol: bisogna mostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$.

un primo tentativo, vista la forma della funzione e il limite
che dobbiamo calcolare, sembrerebbe essere quello di passare a
coordinate polari $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$. proviamo:

$$\frac{r^8(\cos^2\vartheta \sin^6\vartheta)}{r^6\cos^6\vartheta + r^8\sin^8\vartheta} = \frac{r^8(\cos^2\vartheta \sin^6\vartheta)}{\cancel{r^6}(\cos^6\vartheta + r^2\sin^8\vartheta)} = \frac{r^2\cos^2\vartheta \sin^6\vartheta}{(\cos^6\vartheta + r^2\sin^8\vartheta)}.$$

È vero che $\lim_{r\to 0^+} \dfrac{r^2\cos^2\vartheta\sin^6\vartheta}{\cos^6\vartheta + r^2\sin^8\vartheta} = 0$? Non sembra immediato né

è facile mostrarlo così: notiamo che ci sono funzioni
che dipendono da ϑ al denominatore e vorremmo stimarle!

lo scopo è scrivere $\left|\dfrac{r^2\cos^2\vartheta\sin^6\vartheta}{\cos^6\vartheta + r^2\sin^8\vartheta}\right| \overset{(*)}{\leq} \varphi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

$\boxed{\text{solo } r!}$

ma se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ad es., al denominatore c'è $0 + r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

come ottenere una stima indipendente da ϑ?

Si può studiare la funzione $\vartheta \mapsto \dfrac{\cos^2\vartheta\sin^6\vartheta}{\cos^6\vartheta + r^2\sin^8\vartheta}$ come funzione della

sola ϑ e si cerca il $\max_{\vartheta\in[0,\pi]}(\ \ )$ e lo si usa per stimare (*).

Questo max potrebbe (anzi dipende!) da r e va a $+\infty$ per r che va

a 0, ma con una potenza minore di 2 ...)
Non è il metodo più conveniente. Spieghiamo una tecnica per risolvere questo tipo di problemi; si ha <u>in generale</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a y^b}{x^{2m_a} + y^{2m_b}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

potenze pari al denominatore

è continua <u>sse</u> $\boxed{\dfrac{a}{2m_a} + \dfrac{b}{2m_b} > 1}$

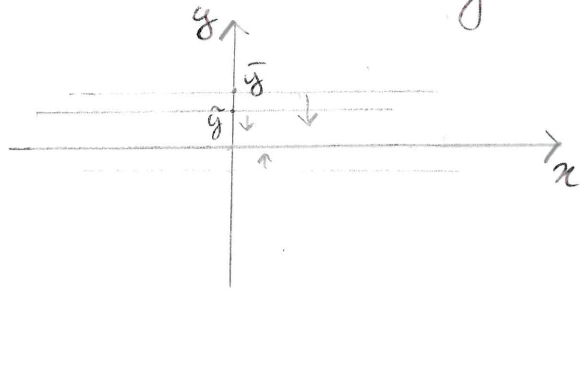
OSS. come detto prima questa tecnica è molto più generale per questo problema c'è un modo più semplice per la continuità: vedere altri appunti!

(nel nostro caso $\dfrac{a}{2m_a} = \dfrac{2}{6}$; $\dfrac{b}{2m_b} = \dfrac{6}{8}$ e

$\dfrac{2}{6} + \dfrac{6}{8} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{12} > 1$). Come si fa a provare?

Facciamolo nel nostro caso particolare (per non appesantire la notazione con $a, b, 2m_a, 2m_b$ ...).

La strategia è la seguente: consideriamo linee parallele a uno dei due assi – è equivalente – diciamo l'asse x.
Quindi consideriamo linee di equazione $y = \bar{y}$, $\bar{y} \neq 0$, e poi le faremo avvicinare all'asse x, cioè a $y = 0$.



Quello che faremo è restringerci a ognuna di queste linee, mostrare che la funzione è <u>limitata</u> su ognuna di queste linee, che ha un <u>massimo</u>, che determineremo, e che questo massimo va a 0 quando la linea si avvicina all'asse x. Questo costringe tutte le funzione ad andare a 0 per $(x,y)\to(0,0)$.
(convincersene, pure graficamente o con mathematica: è intuitivo ciò che sta accadendo).

Fissiamo $\bar{y}\neq 0$. Consideriamo la funzione

$$x \mapsto \frac{x^2\bar{y}^6}{x^6+\bar{y}^8} \quad \text{per} \quad x\in\mathbb{R}$$

. È una funzione di una sola variabile;

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\bar{y}^6}{x^6+\bar{y}^8}=0 \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\bar{y}^6}{x^6+\bar{y}^8}=0$$

. La funzione è pari, quindi si comporta nello stesso modo per $x\leq 0$. È positiva.

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2\bar{y}^6}{x^6+\bar{y}^8}=\frac{2x\bar{y}^6(-2x^6+\bar{y}^8)}{(x^6+\bar{y}^8)^2}=0 \text{ se } x=0 \text{ (ma qui la funzione vale 0)}$$

e se $x^6=\frac{\bar{y}^8}{2}$ (>0). Questo è il punto di massimo;

il massimo vale (sostituendo $x^2=\frac{\bar{y}^{\frac{8}{3}}}{2^{1/3}}$, $x^6=\frac{\bar{y}^8}{2}$)

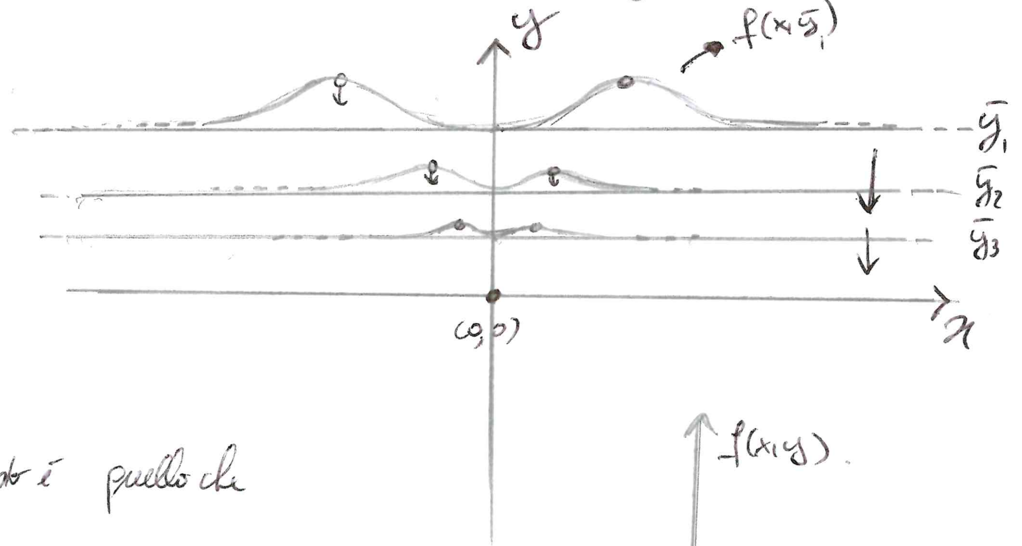
$$\frac{\bar{y}^6\,\bar{y}^{\frac{8}{3}}\cdot 2^{-1/3}}{\bar{y}^8(1+\frac{1}{2})}=\frac{2^{2/3}}{3}\cdot\bar{y}^{2/3}\to 0 \;!!$$

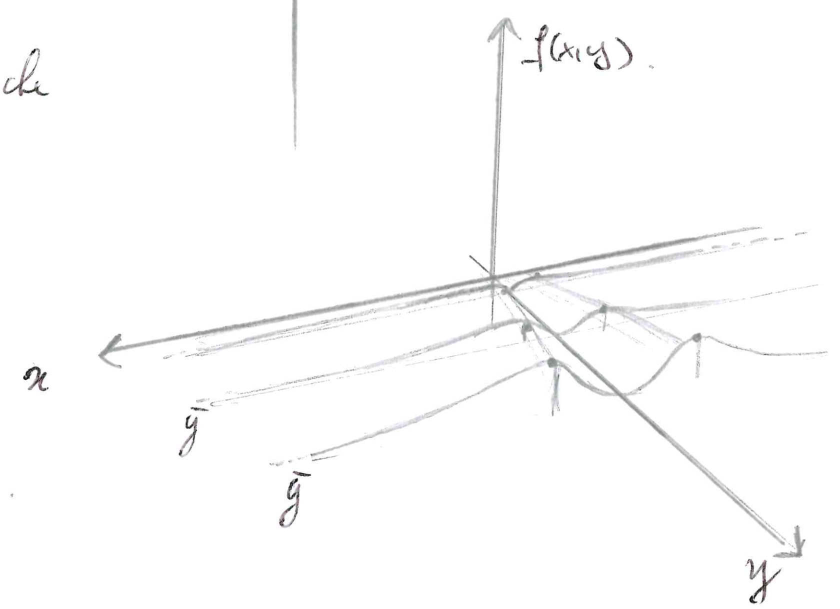
← qui saltano fuori gli esponenti giusti.

Quindi su ogni retta parallela all'asse delle x
f ha un massimo che vale $\frac{2^{2/3}}{3}\bar{y}^{2/3}$ e viene raggiunto
nei punti $x^6 = \frac{\bar{y}^8}{2}$ $\left(x = \pm \frac{\bar{y}^{4/3}}{2^{1/6}} \quad 4/3 > 0\right)$; i punti di massimo
vanno verso O per $\bar{y} \to 0$ (cioè quando avviciniamo la retta all'asse x) ed anche il valore del massimo (è questo il fatto importante) va a O per $\bar{y} \to 0$:
era $\frac{2^{2/3}}{3} \cdot \bar{y}^{2/3} \xrightarrow[\bar{y} \to 0]{} 0$.

Questo è sufficiente a concludere che $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y^6}{x^6 + y^8} = 0$.

→ Immaginiamo di disegnare come profilo di una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per ogni retta // all'asse x la funzione $f(x, \bar{y})$. Questo è quello che succede quando $\bar{y} \to 0$.





possiamo a studiare la differenziabilità in (0,0).

$f(x,0) \equiv 0$ e $f(0,y) \equiv 0$; per cui

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$; il candidato

$df(0,0)$ è $(0,0)$.

Verifichiamo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{df(0,0)(x-0,y-0)}_{=0}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 .$$

Si tratta della funzione

$\frac{x^2y^6}{(x^6+y^8)\sqrt{x^2+y^2}}$. In maniera intuitiva, abbiamo

visto che lungo una particolare curva, quella descritta dai punti di massimo lungo le linee $\bar{y}$ parallele al x, la funzione sta andando come una potenza di $y^{2/3}$; che è il comportamento peggiore che ha su qualsiasi curva che si avvicina a (0,0) (proprio perché abbiamo scelto la curva dei massimi! Ora stiamo dividendo per qualcosa che va come "y" quindi ci aspettiamo qualcosa del tipo " $\frac{y^{2/3}}{y}$ $\cancel{\to} 0$ ". Questo ragionamento è molto naif ma ci suggerisce che probabilmente non c'è differenziabilità in (0,0). Possiamo tentare un approccio simile a quello fatto per la continuità, ma la derivata in x sembra più complicata da calcolare.

se sospettiamo che non ci sia differenziabilità, cioè che quel limite non sia zero, una strategia è cercare curve (rette, parabole, etc.) lungo le quali il limite non è 0, oppure non esiste.

tentiamo curve del tipo $y = x^{\alpha}$, $\alpha > 0, (x>0)$.

$$\frac{x^2 x^{6\alpha}}{(x^6 + x^{8\alpha})\sqrt{x^2 + x^{2\alpha}}} = \frac{x^{6\alpha+2}}{x^{8\alpha}(x^{6-8\alpha}+1)\cdot x^{\alpha}\sqrt{x^{2-2\alpha}+1}} =$$

$$= \frac{x^{2-3\alpha}}{(1+x^{6-8\alpha})\sqrt{1+x^{2-2\alpha}}}.$$ esiste un $\alpha > 0$ t.c. $\begin{cases} 2-3\alpha < 0 \\ 6-8\alpha \geq 0 \\ 2-2\alpha \geq 0 \end{cases}$?

deve essere $\alpha > \frac{2}{3}$, $\alpha \leq \frac{3}{4}$ e $\alpha \leq 1$; ad esempio $\alpha = \frac{3}{4}$: essa è $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \leq 1$; con questa scelta di α, quindi lungo la curva $y = x^{3/4}$, si ha

$$\frac{f(x, x^{3/4})}{\sqrt{x^2+x^{\frac{6}{4}}}} = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{2\cdot\sqrt{1+x^{5/2}}} = \frac{1}{2x^{1/4}\sqrt{1+x^{5/2}}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \neq 0;$$

per cui f non è differenziabile in $(0,0)$.

$\square$

3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) continuità su $\mathbb{R}^2$

) differenziabilità su $\mathbb{R}^2$.

Sol: come prima: osserviamo $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12} > 1$. Ci aspettiamo continuità. Retta $y = \bar{y} \neq 0$ parallela all'asse x. C'è un x?

Siccome il nostro scopo è mostrare che il limite è 0, consideriamo $|f(x,\bar{y})|$.

$|f(x,\bar{y})| = \dfrac{|x|^3 \bar{y}^2}{x^4 + y^6}$; $\lim_{x \to +\infty} |f(x,\bar{y})| = 0$; $\lim_{x \to 0^+} |f(x,\bar{y})| = 0$; è pari. mettiamoci su $x \geq 0$

$$\frac{d}{dx}|f(x,\bar{y})| \underset{x \geq 0}{=} \frac{d}{dx} f(x,\bar{y}) = \frac{\bar{y}^2(3x^2\bar{y}^6 - x^6)}{(x^4 + \bar{y}^6)^2} = 0 \iff x = 0 \text{ (dove però vale 0)}$$

e $x^4 = 3\bar{y}^6$ (e quindi $x^3 = 3^{3/4}\bar{y}^{9/2}$); è un punto di massimo. Come prima, il massimo vale

$$\frac{3^{3/4} \cdot \bar{y}^{9/2} \cdot \bar{y}^2}{3\bar{y}^6 + \bar{y}^6} = \frac{3^{3/4}}{4} \cdot \bar{y}^{1/2} \xrightarrow[\bar{y} \to 0]{} 0.$$

Quindi la funzione è continua in $(x,y) = (0,0)$. È differenziabile in $(0,0)$? Come prima, siccome $f(x,0) \equiv 0$ e $f(0,y) \equiv 0$, il differenziale in $(0,0)$ se esiste è $(0,0)$. Dobbiamo quindi mostrare se

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Abbiamo visto, in modo "naif", che la situazione "peggiore" con cui la funzione va a 0 è come $y^{1/2}$: siccome ora stiamo dividendo per "y", non ci aspettiamo che il limite sia 0. Come provarlo?

Cerchiamo una curva $y=x^{\alpha}$, $\alpha>0$ (e $x\geq 0$) lungo la quale il limite è $\neq 0$ o non esiste.

$$\frac{f(x,x^{\alpha})}{\sqrt{x^2+x^{2\alpha}}}=\frac{x^3 x^{2\alpha}}{(x^4+x^{6\alpha})\sqrt{x^2+x^{2\alpha}}}=\frac{x^{3+2\alpha}}{x^{6\alpha}(x^{4-6\alpha}+1)\cdot x^{\alpha}\cdot\sqrt{x^{2-2\alpha}+1}}=$$

$$=\frac{x^{3+2\alpha-6\alpha-\alpha}}{(1+x^{4-6\alpha})\cdot\sqrt{1+x^{2-2\alpha}}}=\frac{x^{3-5\alpha}}{(1+x^{4-6\alpha})\cdot\sqrt{1+x^{2-2\alpha}}}.$$

Cerchiamo $\alpha>0$ t.c. $4-6\alpha\geq 0$, $2-2\alpha\geq 0$, $3-5\alpha<0$,

cioè $\begin{cases}\alpha\leq\frac{2}{3}\\ \alpha\leq 1\\ \alpha>\frac{3}{5}\end{cases}$; vediamo che $\alpha=\frac{2}{3}$ va bene ($\frac{2}{3}>\frac{3}{5}\iff 10>9$ V.)

Prendiamo $\alpha=\frac{2}{3}$. Lungo la curva $y=x^{2/3}$ si ha

$$\frac{f(x,x^{2/3})}{\sqrt{x^2+x^{2\alpha}}}=\frac{x^{-1/3}}{2\cdot\sqrt{1+x^{2/3}}}=\frac{1}{2x^{1/3}\sqrt{1+x^{2/3}}}\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty.$$

Per cui non c'è differenziabilità in $(0,0)$.

$\square$

255. ~~Casi "simili" ma semplici~~